

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA**

**Facultad de Ciencias**

**Escuela Profesional de Matemática**



**TESIS**

**APROXIMACIÓN DE LOS CEROS DE FUNCIONES CONTINUAS  
DE VARIAS VARIABLES REALES Y VALOR REAL MEDIANTE  
EL MÉTODO DE BISECCIÓN CON EL MATHEMATICA**

**Presentada por:**

**Br. Luis Alberto Anto Mimbela**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE  
LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

**Línea de investigación: Geometría y Cálculo Simbólico**

**Piura, Perú**

**2019**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA**

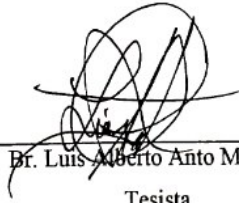
**Facultad de Ciencias**

**Escuela Profesional de Matemática**

**TESIS**

**APROXIMACIÓN DE LOS CEROS DE FUNCIONES CONTINUAS  
DE VARIAS VARIABLES REALES Y VALOR REAL MEDIANTE  
EL MÉTODO DE BISECCIÓN CON EL MATHEMATICA**

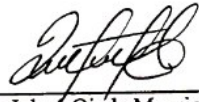
**Línea de investigación: Geometría y Cálculo Simbólico**



---

Br. Luis Alberto Anto Mimbela

Tesista



---

Dr. Edgar Johnny Ojeda Mauriola

Asesor

## DECLARACIÓN JURADA DE ORIGINALIDAD DE LA TESIS

Yo Luis Alberto Anto Mimbela identificado con DNI N° 43581010, Bachiller de la Escuela Profesional de Matemática, de la Facultad de Ciencias y domiciliado en Jirón Colón 353, del Distrito de Chulucanas, Provincia de Morropón, Departamento de Piura. Celular 931138520, Email [la86926@gmail.com](mailto:la86926@gmail.com).

**DECLARO BAJO JURAMENTO:** que la tesis que presento es original e inédita, no siendo copia parcial ni total de una tesis desarrollada, y/o realizada en el Perú o en el Extranjero, en caso contrario de resultar falsa la información que proporciono, me sujeto a los alcances de lo establecido en el Art. N° 411, del Código Penal concordante con el Art. N° 32 de la Ley N° 27444, y Ley de Procedimiento Administrativo General y las Normas Legales de Protección a los Derechos de Autor.

En fe de lo cual firmo la presente.

Piura-Perú, lunes, 31 de Julio de 2019.



Luis Alberto Anto Mimbela

DNI 43581010

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA**

**Facultad de Ciencias**

**Escuela Profesional de Matemática**

**TESIS**

**APROXIMACIÓN DE LOS CEROS DE FUNCIONES CONTINUAS  
DE VARIAS VARIABLES REALES Y VALOR REAL MEDIANTE  
EL MÉTODO DE BISECCIÓN CON EL MATHEMATICA**

**Línea de investigación: Geometría y Cálculo Simbólico**



---

Sc. Graciela del Pilar Burgos Namuche

Presidente



---

MSc. José Valentín Purizaca Martínez

Vocal



---

Dra. Beneranda Carrasco Chumacero

Secretaria



# UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA FACULTAD DE CIENCIAS



"AÑO DE LA LUCHA CONTRA LA CORRUPCIÓN Y LA IMPUNIDAD"

## ACTA DE SUSTENTACIÓN 036-2019-UI-FC-UNP

### FACULTAD DE CIENCIAS

Los Miembros del Jurado Calificador que suscriben, reunidos para evaluar la Tesis denominada "APROXIMACIÓN DE LOS CEROS DE FUNCIONES CONTINUAS DE VARIAS VARIABLES REALES Y VALOR REAL MEDIANTE EL MÉTODO DE BISECCIÓN CON EL MATHEMATICA", presentada por el señor Bachiller **LUIS ALBERTO ANTO MIMBELA**, con el asesoramiento del **Dr. Edgar Johny Ojeda Mauriola**; oídas las observaciones y respuestas a las preguntas formuladas, y de conformidad al Reglamento de Tesis para obtener el Título Profesional en la Facultad de Ciencias, lo declaran:

**APROBADO** ☒

**DESAPROBADO** ☐

Con la mención de:

*Desistente*

☒ En consecuencia, queda en condición de ser ratificado por el Consejo de Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Piura, y recibir el **TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA**.

☒ En consecuencia, queda en condición de ser ratificado por el Consejo Universitario de la Universidad Nacional de Piura, y recibir el **TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA**; después que el sustentante incorpore la sugerencia del Jurado Calificador.

Piura, 11 de julio de 2019.

UNP

*[Firma]*  
**MSc. GRACIELA DEL PILAR BURGOS NAMUCHE**  
PRESIDENTE DE JURADO DE TESIS

*[Firma]*  
**Dra. BENERANDA CARRASCO CHUMACERO**  
SECRETARIO DE JURADO DE TESIS

*[Firma]*  
**MSc. JOSÉ VALENTÍN PURIZACA MARTÍNEZ**  
VOCAL DE JURADO DE TESIS



Campus Universitario - Urb. Miraflores S/N. Castilla  
PIURA - PERU

## **DEDICATORIA**

Dedico esta tesis a Dios que estuvo en todo momento conmigo, a mis padres Cosme Anto y Mercedes Mimbela, mi esposa Raquel y mi hermano Víctor que me apoyaron incondicionalmente en la parte moral y económica para poder llegar a ser un profesional. Para todos ellos hago esta dedicatoria.

## **AGRADECIMIENTOS**

A Dios: Que gracias por estar conmigo y darme fuerzas y energías para lograr mis objetivos trazados.

A mis padres: Que gracias a sus consejos y apoyo incondicional me han ayudado a crecer como persona con valores, y a luchar cada día por lo que quiero.

A mi hermano: Gracias a su apoyo y ánimo de seguir adelante en mi progreso profesional.

A mi esposa: Gracias a que ella estuvo conmigo en todo momento y darme cariño y amor que fueron ingredientes importantes en mi vida. Este logro también es tuyo.

A mi asesor Edgar Ojeda: Gracias por el tiempo y preocuparse sinceramente por mi progreso de investigación. Y por el aporte de ideas.

A Robert Ipanaqué: Por el apoyo en algunos conocimientos e ideas sobre la investigación.

# ÍNDICE GENERAL

Introducción .....	1
I. Aspectos de la problemática.....	2
1.1. Descripción de la realidad problemática .....	2
1.2. Formulación del problema de investigación .....	2
1.3. Justificación e importancia de la investigación .....	2
1.4. Objetivos .....	2
1.4.1. Objetivo general .....	2
1.4.2. Objetivos específicos.....	2
II. Marco teórico .....	3
2.1. Antecedentes de la investigación .....	3
2.2. Bases teóricas .....	4
2.2.1. Teorema de conservación del signo .....	4
2.2.2. Teorema de Bolzano.....	4
2.2.3. Teorema del valor intermedio para funciones continuas.....	4
2.2.4. Ceros de una función de una variable real y valor real .....	4
2.2.5. Ceros de una función de dos variables reales y valor real.....	4
2.2.6. Método de bisección.....	5
2.2.7. Algoritmo para el método de bisección.....	5
2.2.8. El método de bisección en el Mathematica .....	6
2.2.9. Intervalo cerrado .....	7
2.2.10. Particiones .....	7
2.2.11. Particiones equiespaciadas .....	7
2.2.12. Segmento cerrado .....	7
2.2.13. Particiones en dos dimensiones.....	7
2.2.14. Particiones en dimensiones mayores que dos.....	8
2.2.15. Mathematica.....	8
2.2.16. Programación en el lenguaje Mathematica .....	8
2.3. Glosario de términos básicos.....	12
2.3.1. Aproximación.....	12
2.3.2. Error absoluto.....	12
2.3.3. Error relativo .....	12



2.3.4.	Algoritmo .....	12
2.4.	Hipótesis.....	12
III.	Marco metodológico .....	12
3.1.	Enfoque .....	12
3.2.	Diseño .....	12
3.3.	Nivel.....	12
3.4.	Tipo .....	13
3.5.	Métodos y procedimientos .....	13
3.6.	Aspectos éticos.....	13
IV.	Resultados y discusión .....	13
4.1.	Teoremas para funciones continuas de varias variables.....	13
4.2.	Método de bisección para funciones continuas de varias variables .....	14
4.3.	Ejemplos aplicativos .....	14
4.4.	Segmentos sobre particiones equiespaciadas .....	18
4.4.1.	Segmentos en un espacio 1D.....	18
4.4.2.	Segmentos en un espacio 2D.....	19
4.4.3.	Segmentos en un espacio 3D.....	23
4.4.4.	Segmentos en un espacio 4D.....	27
4.4.5.	Segmentos en un espacio $nD$ .....	30
4.4.6.	El nuevo comando ImplicitPlot4D.....	32
	Conclusiones .....	37
	Recomendaciones.....	38
	Referencias bibliográficas .....	39
	ANEXO 1.....	41

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Ceros de la función $f(x) = x^2 + 1 - x \cos x - 1.5$ en $D: 0 \leq x \leq 8$ .....	5
Figura 2. Ceros de la función $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$ en $D: -2 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 2$ . ....	5
Figura 3. Gráfica de $f(x) = x^2$ , con $0 \leq x \leq 1$ .....	11
Figura 4. Gráfica de la inversa de $f(x) = x^2$ , con $0 \leq x \leq 1$ . ....	11
Figura 5. Esquema de la función compuesta $\tilde{f}$ .....	14
Figura 6. Cero aproximado de la función $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$ en el segmento $[(0.5, 0.5), (1, 0)]$ . ....	16
Figura 7. Partición equiespaciada del intervalo $[0, 8]$ .....	18
Figura 8. Ceros de la $f(x) = x^2 + 1 - x \cos x - 1.5$ en $[0, 8]$ (color negro).....	19
Figura 9. Gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1 - x \cos x - 1.5$ y sus ceros en $[0, 8]$ . ....	19
Figura 10. Partición equiespaciada del rectángulo $[-3, 3] \times [-2, 2]$ . ....	20
Figura 11. Ceros de la función $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$ en $[-3, 3] \times [-2, 2]$ . ....	21
Figura 12. Gráfica de la función $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$ y sus ceros en $[-3, 3] \times [-2, 2]$ . ....	21
Figura 13. Ceros de la función $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$ en $[-3, 3] \times [-2, 2]$ unidos por una línea quebrada. ....	22
Figura 14. Gráfica de la función $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$ y sus ceros unidos por una línea quebrada en $[-3, 3] \times [-2, 2]$ . ....	23
Figura 15. Aproximación de la curva $C: x^5 + y^5 - 5xy = 0$ en $[-3, 3] \times [-2, 2]$ . ....	24
Figura 16. Partición equiespaciada del intervalo 3-dimensional $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$ .....	24
Figura 17. Ceros de la función $f(x, y, z) = x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz$ en $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$ . ....	25
Figura 18. Ceros de la función $f(x, y, z) = x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz$ en $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$ unidos por una línea quebrada.....	26
Figura 19. Aproximación de la superficie $S: x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz = 0$ en $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$ .....	27
Figura 20. Partición equiespaciada del intervalo 4-dimensional $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$ . ....	28
Figura 21. Ceros de la función $f(x, y, z, w) = x^5 + y^5 + z^5 + w^5 - 5xy - 5xz - 5xw - 5yz - 5yw - 5zw$ en $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$ .....	29
Figura 22. Ceros de la $f(x, y, z, w) = x^5 + y^5 + z^5 + w^5 - 5xy - 5xz - 5xw - 5yz - 5yw - 5zw$ en $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$ unidos por una línea quebrada. ....	30
Figura 23. Aproximación de la hipersuperficie $H: x^5 + y^5 + z^5 + w^5 - 5xy - 5xz - 5xw - 5yz - 5yw - 5zw = 0$ en $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$ . ....	31
Figura 24. Gráfica de $M_1$ .....	33

Figura 25. Gráfica de $M_2$ .....	34
Figura 26. Gráfica de $M_3$ .....	34
Figura 27. Gráfica de $M_4$ .....	35
Figura 28. Gráfica de $M_5$ .....	36
Figura 29. Gráfica de $M_6$ .....	36

## RESUMEN

El método de bisección se usa para aproximar ceros de funciones continuas de variable real y valor real. En este trabajo se propone el uso del método de bisección para aproximar los ceros de funciones continuas de varias variables reales y valor real. La propuesta se basa en aplicar el método de bisección a la composición de la función de varias variables y la función que define un segmento que une un determinado punto del dominio de la función de varias variables con otro punto del mismo dominio. Los segmentos se seleccionan ordenadamente al realizar una partición equiespaciada del dominio de la función. Los resultados permiten obtener bosquejos de las gráficas de hipersuperficies dadas en forma implícita.

**PALABRAS CLAVE:** Bisección, hipersuperficies, ImplicitPlot4D.

## **ABSTRACT**

The bisection method is used to approximate zeros of continuous functions of real variable and real value. In this paper we propose the use of the bisection method to approximate the zeros of continuous functions of several real variables and real value. The proposal is based on applying the bisection method to the composition of the function of several variables and the function that defines a segment that joins a certain point of the domain of the function of several variables with another point of the same domain. Segments are selected in order when performing an equally spaced partition of the function domain. The results allow to obtain sketches of the hypersurface graphs given implicitly.

**KEYWORDS:** Bisection, hypersurfaces, ImplicitPlot4D.

## INTRODUCCIÓN

La aproximación de ceros de funciones continuas de varias variables y valor real tiene aplicación a la realidad, específicamente en problemas de minimización no lineal (Morozova, 2008). Se han realizado trabajos para dar solución al problema de la aproximación de ceros de funciones continuas de varias variables y valor real (Bachrathy, 2014; Bachrathy & Stépán, 2012; Martin & Rayskin, 2016; López, 2017). No obstante, estos trabajos hacen generalizaciones diferentes a la que se proponen en este trabajo.

En este trabajo se aproximan los ceros de funciones continuas de varias variables y valor real mediante el método de bisección. Para ello se empezó por verificar que los teoremas de conservación de signo, Bolzano y valor intermedio se cumplen para funciones continuas de varias variables y valor real. Luego, se enunció y verificó un teorema que define el método de bisección para funciones continuas de varias variables y valor real. Seguidamente, se realizaron las interpretaciones geométricas de los resultados. Finalmente, se realizó la implementación computacional de los resultados.

La metodología que se utilizó tiene un enfoque cuantitativo, un diseño experimental, un nivel descriptivo y es de tipo básica.

Este trabajo se realizó debido a que no se registra el uso del método de bisección para aproximar los ceros de funciones continuas de varias variables y valor real en la forma que se propone en este trabajo y para aportar otra generalización del método de bisección en la aproximación de los ceros de funciones continuas de varias variables y valor real, lo que permitirá obtener puntos que pertenezcan a las gráficas de curvas, superficies, sólidos, etc.

En la búsqueda de antecedentes relacionados con este trabajo de investigación se pudo tener acceso virtual a cinco artículos (Morozova, 2008; Bachrathy & Stépán, 2012; Bachrathy, 2014; Martin & Rayskin, 2016; López, 2017).

# **I. ASPECTOS DE LA PROBLEMÁTICA**

## **1.1. DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA**

La aproximación de ceros de funciones continuas de varias variables y valor real tiene aplicación a la realidad, específicamente en problemas de minimización no lineal (Morozova, 2008). En un curso de pregrado se estudia el método de Newton, el cual admite una generalización para aproximar ceros de funciones de  $n$  variables y  $n$  valores, aunque este método exige el cálculo del jacobiano y no permite aproximar ceros de funciones de varias variables y valor real. Por otra parte, se han realizado diversos trabajos para dar solución al problema de la aproximación de ceros de funciones de varias variables y valor real (Bachrathy, 2014; Bachrathy & Stépán, 2012; Martin & Rayskin, 2016; López, 2017). No obstante, estos trabajos hacen generalizaciones diferentes a la que se proponen en este trabajo.

## **1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN**

¿Es posible aproximar los ceros de funciones continuas de varias variables y valor real mediante el método de bisección?

## **1.3. JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN**

Este trabajo se realizó debido a que no se registra el uso del método de bisección para aproximar los ceros de funciones continuas varias variables y valor real en la forma que se propone en este trabajo.

Este trabajo se realizó para aportar otra generalización del método de bisección en la aproximación de los ceros de funciones continuas de varias variables y valor real. Esto permitirá obtener puntos que pertenezcan a las gráficas de curvas, superficies, sólidos, etc.

## **1.4. OBJETIVOS**

### **1.4.1. Objetivo general**

Aproximar los ceros de funciones continuas de varias variables y valor real mediante el método de bisección.

### **1.4.2. Objetivos específicos**

- Verificar que los teoremas de conservación de signo, Bolzano y valor intermedio se cumplen para funciones continuas de varias variables reales y valor real.

- Enunciar el método de bisección para funciones continuas de varias variables reales y valor real.
- Realizar las interpretaciones geométricas de los resultados.
- Realizar la implementación computacional de los resultados.

## **II. MARCO TEÓRICO**

### **2.1. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN**

Un primer trabajo de (Morozova, 2008). Se trata de un artículo en el que se propone un nuevo método de bisección multidimensional para minimizar la función sobre simplex para resolver el problema de minimización no lineal no restringido. Este artículo se relaciona con la investigación planteada en que utiliza segmentos a los cuales aplica el método de bisección tradicional. No obstante, estos segmentos son originados de manera diferente a la que proponemos.

Un segundo trabajo de (Bachrathy & Stépán, 2012). El contenido del artículo describe los pasos críticos del método de bisección multidimensional y propone posibles soluciones. La eficiencia del método propuesto por los autores se caracteriza por la dimensión fractal de conteo de cajas de los puntos evaluados. Este trabajo difiere sustancialmente de la investigación propuesta pues utiliza elementos de la teoría fractal, sin embargo, sus resultados son los mismos que se pretende obtener para cumplir con el objetivo general.

Un tercer trabajo de (Bachrathy, 2014). Constituye una guía de usuario del paquete en MatLab, MDBM, para el cálculo rápido de todas las raíces de una función no lineal para dimensiones más altas. El paquete se desarrolló con base en (Bachrathy & Stépán, 2012).

Un cuarto trabajo de (Martin & Rayskin, 2016). En este artículo preimpreso se presentan un algoritmo y análisis de soporte para encontrar las raíces de sistemas de ecuaciones continuas en dos dimensiones mediante iteración de bisección. Este trabajo es pertinente con la investigación aquí planteada, ya que define segmentos a los cuales aplica el método de bisección tradicional. Sin embargo, tales segmentos son generados de forma distinta a la que planteamos.

Un quinto trabajo de (López, 2017), propone un método de bisección multivariante apoyado por el teorema de Poincaré-Miranda para resolver un sistema no lineal de ecuaciones. Dado un cubo inicial que verifica la hipótesis del teorema de Poincaré-Miranda, el algoritmo realiza refinamientos congruentes en todo su centro al generar una aproximación de raíz. Este trabajo difiere de la investigación propuesta pues considera funciones del espacio euclidiano  $n$ -dimensional sobre sí mismo, utiliza el teorema de Poincaré-Miranda y el jacobiano de las funciones consideradas.



## 2.2. BASES TEÓRICAS

Este trabajo se basa en el método de bisección para aproximar ceros de funciones continuas reales y de valor real y de generalizar a las funciones continuas de varias variables y valor real, el método de bisección para aproximar ceros de funciones continuas reales y de valor real.

### 2.2.1. Teorema de conservación del signo

Sea  $f$  continua en  $c$  y supongamos que  $f(c) \neq 0$ . Existe entonces un intervalo  $\langle c - \delta, c + \delta \rangle$  en el que  $f$  tiene el mismo signo que  $f(c)$  (Apostol, Calculus, 2001).

### 2.2.2. Teorema de Bolzano

Sea  $f$  continua en cada punto del intervalo cerrado  $[a, b]$  y supongamos que  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos opuestos. Existe entonces por lo menos un  $c$  en el intervalo abierto  $\langle a, b \rangle$  tal que  $f(c) = 0$  (Apostol, Calculus, 2001).

### 2.2.3. Teorema del valor intermedio para funciones continuas

Sea  $f$  continua en cada punto de un intervalo  $[a, b]$ . Si  $x_1 < x_2$  son dos puntos cualesquiera de  $[a, b]$  tales que  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , la función  $f$  toma todos los valores comprendidos entre  $f(x_1)$  y  $f(x_2)$  por lo menos una vez en el intervalo  $\langle x_1, x_2 \rangle$  (Apostol, Calculus, 2001).

### 2.2.4. Ceros de una función de una variable real y valor real

Sea  $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $D$ , los ceros de  $f$  son los elementos del conjunto  $\theta_f = \{x \in D \mid f(x) = 0\}$ .

Los ceros de una función así dada son puntos de la recta real ( $\mathbb{R}$ ) que satisfacen  $f(x) = 0$ . Por ejemplo, la Figura 1 muestra los ceros de la función

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x \cos x - 1.5 \text{ en } D: 0 \leq x \leq 8.$$

### 2.2.5. Ceros de una función de dos variables reales y valor real

Sea  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $D$ , los ceros de  $f$  son los elementos del conjunto  $\theta_f = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = 0\}$ .

Los ceros de una función así son puntos del plano ( $\mathbb{R}^2$ ) que descansan sobre la curva  $f(x, y) = 0$ . Por ejemplo, la Figura 2 muestra los ceros de la función

$$f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy \text{ en } D: -2 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 2.$$

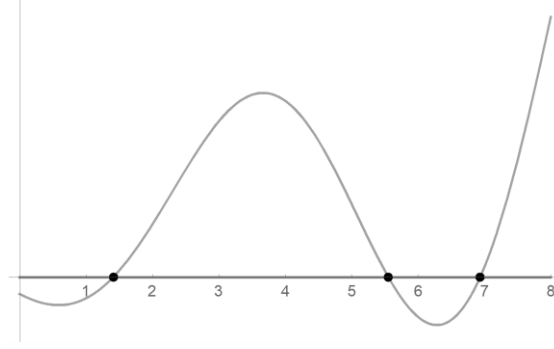


Figura 1. Ceros de la función  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x \cos x - 1.5$  en  $D: 0 \leq x \leq 8$ .

### 2.2.6. Método de bisección

Sea  $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua, con  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . La sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , tal que

$$x_n(a, b) = \begin{cases} \frac{a+b}{2} & n = 1 \vee f(x_1(a, b)) = 0, \\ \begin{cases} x_{n-1}(x_1(a, b), b) & f(a) \cdot f(x_1(a, b)) > 0, \\ x_{n-1}(a, x_1(a, b)) & \text{otro caso.} \end{cases} & n > 1. \end{cases}$$

converge a  $p$ , con  $f(p) = 0$ , tan rápido como  $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a cero (Ipanaqué, 2014).

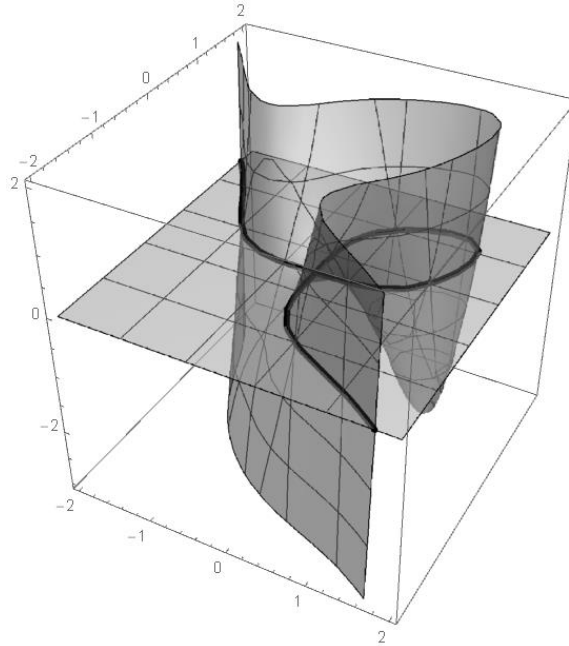


Figura 2. Ceros de la función  $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$  en  $D: -2 \leq x \leq 2 \wedge -2 \leq y \leq 2$ .

### 2.2.7. Algoritmo para el método de bisección

El algoritmo que usaremos en este trabajo se basa en el algoritmo propuesto por (Burden & Faires, 2002). La modificación consiste en que no se considera el número máximo de iteraciones.

### ***Biseción***

Para encontrar una solución a  $f(x) = 0$  dada la función continua determinada  $f$  en el intervalo  $[a, b]$ , donde  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos opuestos:

ENTRADA puntos finales  $a, b$ ; tolerancia  $TOL$ .

SALIDA solución aproximada  $q$ .

*Paso 1* Sea  $FA = f(a)$ .

*Paso 2* Mientras  $0.5(b - a) \geq TOL$  haga los pasos 3 – 5 .

*Paso 3* Sea  $q = 0.5(a + b)$ ;

$FQ = f(q)$ .

*Paso 4* Si  $FQ = 0$  o  $|FQ| < TOL$  entonces

SALIDA ( $q$ )

PARE.

*Paso 5* Si  $FA * FQ > 0$ , entonces  $a = q$

$FA = FQ$

$b = q$ .

*Paso 6* SALIDA ( $q$ )

### **2.2.8. El método de bisección en el Mathematica**

El programa que usaremos en este trabajo está codificado teniendo en cuenta el algoritmo de la subsubsección previa.

```
Bisection[fun_,var_,a_,b_,TOL_] :=  
Module[{f=Function[var,fun],A=a,B=b,FA,q,FQ},  
FA=f[a];  
While[0.5 (B-A) >= TOL,  
q=0.5 (A+B);  
FQ=f[q];  
If[FQ==0 || Abs[FQ] < TOL, Return[q]; Break];  
If[FA * FQ > 0, A=q; FA=FQ, B=q];  
];  
q  
]
```

### 2.2.9. Intervalo cerrado

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Si  $a < b$ , se indica por  $[a, b]$  el conjunto de todos los  $x$  que satisfacen las desigualdades  $a \leq x \leq b$  y se denomina intervalo cerrado de  $a$  a  $b$  (Apostol, Calculus, 2001).

### 2.2.10. Particiones

Un intervalo  $[a, b]$ , se supone descompuesto en  $n$  subintervalos fijando  $n - 1$  puntos de subdivisión,  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  sujetos únicamente a la restricción

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b. \quad (1)$$

Es conveniente designar el punto  $a$  por  $x_0$  y el  $b$  por  $x_n$ . Un conjunto de puntos que satisfacen (1) se denomina una partición  $P$  de  $[a, b]$ , y se utiliza el símbolo

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

para designar tal partición. La partición  $P$  determina  $n$  subintervalos cerrados

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n].$$

$[x_{k-1}, x_k]$  indica uno de estos subintervalos cerrados y se dice que es precisamente el subintervalo cerrado  $k$ -ésimo de  $P$  (Apostol, 2001).

### 2.2.11. Particiones equiespaciadas

Diremos que una partición  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , de un intervalo  $[a, b]$ , es equiespaciada si se cumple que

$$x_k - x_{k-1} = (b - a)/n, \quad k = 1, \dots, n.$$

### 2.2.12. Segmento cerrado

Sean  $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^n$ . El segmento de recta de extremos  $\bar{a}, \bar{b}$  es el conjunto

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \{(1 - t)\bar{a} + t\bar{b} \mid 0 \leq t \leq 1\} \text{ (Lima, 1999).}$$

### 2.2.13. Particiones en dos dimensiones

Sea  $Q$  un rectángulo, producto cartesiano de dos intervalos cerrados  $[a, b]$  y  $[c, d]$ ,

$$Q = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid x \in [a, b] \text{ e } y \in [c, d]\}.$$

Consideremos dos particiones  $P_1$  y  $P_2$  de  $[a, b]$  y  $[c, d]$ , respectivamente

$$P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} \text{ y } P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m\},$$

donde  $x_0 = a, x_n = b, y_0 = c, y_m = d$ . Se dice que el producto cartesiano  $P_1 \times P_2$  es una partición de  $Q$ . Puesto que  $P_1$  descompone  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos y  $P_2$  descompone  $[c, d]$  en  $m$  subintervalos, la partición  $P = P_1 \times P_2$  descompone  $Q$  en  $mn$  subrectángulos (Apostol, 2002).

### 2.2.14. Particiones en dimensiones mayores que dos

Un intervalo cerrado  $n$ -dimensional  $[\bar{a}, \bar{b}]$  es el producto cartesiano de  $n$  intervalos unidimensionales cerrados  $[a_k, b_k]$ , en donde  $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$  y  $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$ . Si  $P_1, \dots, P_n$  son particiones de  $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$ , respectivamente, el producto cartesiano  $P = P_1 \times \dots \times P_n$  será una partición de  $[\bar{a}, \bar{b}]$  (Apostol, 2002).

### 2.2.15. Mathematica

Mathematica es el único entorno totalmente integrado del mundo para informática técnica. Lanzado por primera vez en 1988, ha tenido un profundo efecto en la forma en que se utilizan las computadoras en muchos campos técnicos y otros.

Se dice a menudo que el lanzamiento de Mathematica marcó el comienzo de la computación técnica moderna. Desde la década de 1960, los paquetes individuales habían existido para tareas numéricas, algebraicas, gráficas y otras tareas específicas. Pero el concepto visionario de Mathematica fue crear de una vez por todas un sistema único que pudiera manejar todos los diversos aspectos de la computación técnica de una manera coherente y unificada. El avance intelectual clave que hizo esto posible fue la invención de un nuevo tipo de lenguaje de computadora simbólico que podría, por primera vez, manipular la amplia gama de objetos involucrados en la computación técnica utilizando solo un número bastante pequeño de primitivas básicas (Wolfram, 2003).

### 2.2.16. Programación en el lenguaje Mathematica

El Mathematica aparte de admitir su uso como una súper calculadora también constituye un lenguaje de programación que soporta múltiples paradigmas de programación (Gray, 1994; Wellin, Kamin, & Gaylord, 2005).

- Programación funcional. Es la que involucra el uso de funciones de orden superior; entendiéndose como función de orden superior a aquella función que toma entre sus argumentos una o más funciones diferentes.

Mathematica

La función *Map* (función de orden superior) toma como argumento la función  $f$ .

$\text{Map}[f, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}];$

$\{f[1], f[2], f[3], f[4], f[5], f[6], f[7], f[8], f[9], f[10]\}$

Definición del factorial de un número usando programación funcional.

```
f = If[#1 >= 0 && IntegerQ[#1], If[#1 == 0, 1, #1 #0[#1 - 1]]]&;
f[6]
```

120

- Programación basada en reglas. Se caracteriza por transformaciones repetidas de objetos de datos como un término, gráfico, situación de prueba o almacenamiento de restricciones. Las transformaciones son descritas por reglas que especifican el cálculo de un objeto que pretende reemplazar otro objeto descrito por un patrón.

Una forma común de usar las reglas.

```
{f[1], f[2], f[3], f[4], f[5], f[6], f[7], f[8], f[9], f[10]}/. f: > g;
{g[1], g[2], g[3], g[4], g[5], g[6], g[7], g[8], g[9], g[10]}
```

Definición del factorial de un número usando programación basada en reglas.

```
f[0] = 1; f[n_ /; n > 0 && IntegerQ[n]] := n f[n - 1]
f[6]
```

120

- Programación procedural. Se trata de un estilo de programación basado en estructurar el código de un programa en componentes, que reciben el nombre de procedimientos, subrutinas o funciones.

Definición del factorial de un número usando programación procedural.

```
f[n_ /; n >= 0 && IntegerQ[n]] := Module[{t = 1}, Do[t *= i, {i, n}]; t]
f[6]
```

120

Mathematica

Segunda definición del factorial de un número usando programación procedural.

```
f[n_ /; n ≥ 0 && IntegerQ[n]] := Module[{t = 1, i}, For[i = 1, i ≤ n, i++, t *= i]; t]
f[6]
```

120

Mathematica

Tercera definición del factorial de un número usando programación procedural.

```
f[n_ /; n ≥ 0 && IntegerQ[n]] := Module[{t = 1, i}, While[i ≤ n, t *= i; i++]; t]
f[6]
```

120

- Programación recursiva. Es aquella que se basa en invocar una función dentro de la definición de la misma.

Mathematica

Definición del factorial de un número usando programación recursiva.

```
f[n_ /; n ≥ 0 && IntegerQ[n]] := If[n == 0, 1, n f[n - 1]]
f[6]
```

120

- Programación basada en listas. Utiliza listas de elementos para definir las funciones.

Mathematica

Definición del factorial de un número usando programación basada en listas.

```
f[n_ /; n ≥ 0 && IntegerQ[n]] := If[n == 0, 1, Apply[Times, Range[n]]]
f[6]
```

120

- Programación gráfica. Aquí se rescata el hecho que todos los objetos gráficos (obtenidos, por ejemplo, con comandos como *Plot*, *ParametricPlot*, *ContourPlot*, etc.) son generados, con base en complejos algoritmos, mediante los llamados objetos gráficos primitivos (*Point*, *Line*, *Polygon*, etc.), lo que permite crear nuevos programas aprovechando la funcionalidad de los comandos existentes.

Mathematica

Gráfica de la función  $f(x) = x^2$ , con  $0 \leq x \leq 1$ .

`Plot[x^2, {x, 0, 1}]`

Ver Figura 3

Mathematica

Gráfica de la inversa de la función  $f(x) = x^2$ , con  $0 \leq x \leq 1$ .

`Plot[x^2, {x, 0, 1}]/.Line[p_]:>Line[Map[Reverse,p]]`

Ver Figura 4

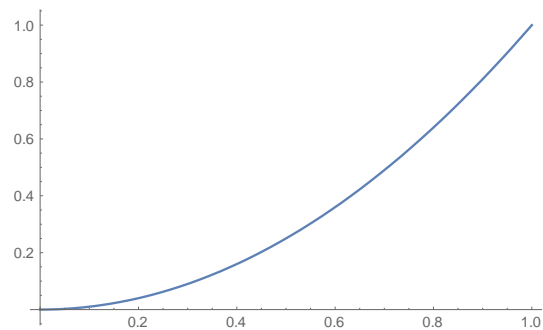


Figura 3. Gráfica de  $f(x) = x^2$ , con  $0 \leq x \leq 1$ .

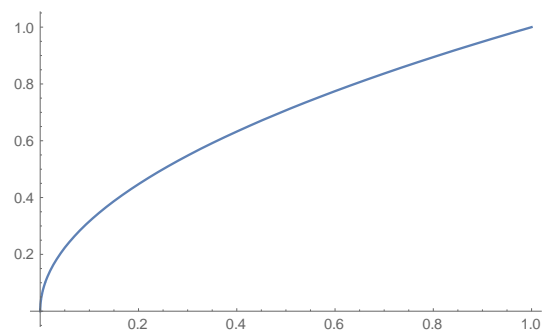


Figura 4. Gráfica de la inversa de  $f(x) = x^2$ , con  $0 \leq x \leq 1$ .



## **2.3. GLOSARIO DE TÉRMINOS BÁSICOS**

### **2.3.1. Aproximación**

Según la RAE, aproximación es el resultado inexacto, pero próximo al exacto, que se obtiene en una medición o en un cálculo cuando no se puede precisar absolutamente.

### **2.3.2. Error absoluto**

La diferencia entre el valor aproximado y el valor exacto de un número, se llama error absoluto de dicho valor aproximado (Burden & Faires, 2002).

### **2.3.3. Error relativo**

Se llama error relativo de un número aproximado, la razón de su error absoluto al número exacto (Burden & Faires, 2002).

### **2.3.4. Algoritmo**

Un algoritmo es un procedimiento que describe, sin ambigüedades, una serie finita de pasos a realizar en un orden específico. El objeto del algoritmo es poner en práctica un procedimiento para resolver un problema o aproximarse a una solución del problema (Burden & Faires, 2002).

## **2.4. HIPÓTESIS**

Es posible aproximar los ceros de funciones continuas de varias variables reales y valor real mediante el método de bisección.

## **III. MARCO METODOLÓGICO**

### **3.1. ENFOQUE**

Cuantitativo.

### **3.2. DISEÑO**

Experimental.

### **3.3. NIVEL**

Descriptivo.

### 3.4. TIPO

Básica.

### 3.5. MÉTODOS Y PROCEDIMIENTOS

Se generará una partición equiespaciada del dominio y con base en los teoremas de conservación de signo, Bolzano y valor intermedio sobre segmentos se aproximará las soluciones del sistema no lineal

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Dado que las aproximaciones provienen de una partición, será posible unirlos con líneas quebradas para obtener el bosquejo de la gráfica de curvas, superficies, sólidos, etc. en  $\mathbb{R}^n$ . En el caso de  $\mathbb{R}^4$  este bosquejo podrá ser visualizado usando un modelo para representar objetos de  $\mathbb{R}^4$  (Velezmoro & Ipanaqué, 2015).

Finalmente, se elaborarán algoritmos que permitirán codificar programas para automatizar todo el proceso. En particular se usará el software de cálculo simbólico Wolfram Mathematica v.11.2, instalado en una computadora portátil de las siguientes características:

- Nombre del dispositivo: DESKTOP-0DHVL9C,
- Procesador: Intel(R) Core (TM) i7-6500U CPU @ 2.50GHz 2.60 GHZ
- RAM instalado: 8.00 GB (7.30 GB usable)

### 3.6. ASPECTOS ÉTICOS

Se utilizará una licencia del Mathematica v.11.2 financiada por la Universidad Nacional de Piura para realizar investigaciones.

Este trabajo de investigación es original no siendo copia parcial ni total de un trabajo de investigación desarrollado, y/o realizado en el Perú o en el Extranjero.

## IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### 4.1. TEOREMAS PARA FUNCIONES CONTINUAS DE VARIAS VARIABLES

Dadas las funciones  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $\psi(t) = (1-t)\bar{a} + t\bar{b}$  y  $f: [\bar{a}, \bar{b}] \subset D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , definiremos la función compuesta  $\tilde{f}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  tal que

$$\tilde{f}(t) = (f \circ \psi)(t) \text{ (Figura 5).}$$

De este modo, los ceros de  $\tilde{f}$  en  $[0,1]$  constituyen los ceros de  $f$  en  $[\bar{a}, \bar{b}]$ . Así pues, los teoremas de conservación de signo, Bolzano y valor intermedio se cumplen de manera natural para funciones continuas de varias variables reales y valor real sobre segmentos contenidos en el dominio de estas.

En particular, si se genera un mallado rectangular equiespaciado en el dominio,  $D$  de  $f$ , se obtendrán segmentos paralelos a los ejes coordenados, sobre los cuales resultará sencillo aproximar los ceros de  $f$ .

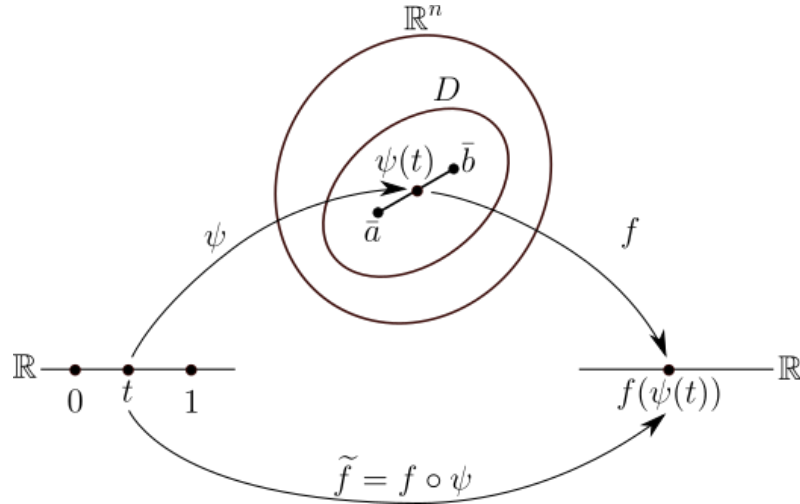


Figura 5. Esquema de la función compuesta  $\tilde{f}$ .

## 4.2. MÉTODO DE BISECCIÓN PARA FUNCIONES CONTINUAS DE VARIAS VARIABLES

Sea  $\tilde{f} \in C^0([0,1])$  una función de valor real, con  $\tilde{f}(0) \cdot \tilde{f}(1) < 0$ . La sucesión  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , tal que

$$x_n(a, b) = \begin{cases} \frac{a+b}{2} & n = 1 \vee \tilde{f}(x_1(a, b)) = 0, \\ \begin{cases} x_{n-1}(x_1(a, b), b) & f(a) \cdot f(x_1(a, b)) > 0, \\ x_{n-1}(a, x_1(a, b)) & \text{otro caso.} \end{cases} & n > 1. \end{cases}$$

converge a  $p$ , con  $\tilde{f}(p) = 0$ , tan rápido como  $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a cero. Donde  $\tilde{f}(t)$  se define según la subsección previa.

## 4.3. EJEMPLOS APLICATIVOS

Dada la función  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$  y el segmento  $[(0.5, 0.5), (1, 0)]$  se construye la función  $\tilde{f}(t) = f((1-t)(0.5, 0.5) + t(1, 0))$  y se aproxima el respectivo cero (Figura 6).

Mathematica

Aquí se define la función  $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$

$$f[\{x_, y_.\}] := x^5 + y^5 - 5xy$$

Mathematica

Aquí se definen las funciones  $\psi(t) = (1 - t)(0.5, 0.5) + t(1, 0)$  y  $\tilde{f}(t) = f(\psi(t))$ .

$$\bar{a} = \{0.5, 0.5\}; \bar{b} = \{1, 0\};$$

$$\psi[t_.] := (1 - t)\bar{a} + t\bar{b}$$

$$\tilde{f}[t_.] := f[\psi[t_]]$$

$$\tilde{f}[t] // Simplify$$

$$-1.1875 + 1.875t^2 + 0.3125t^4$$

Mathematica

Aquí se aplica el método de bisección a la función  $\tilde{f}$  en  $[0, 1]$ , con una tolerancia 0.001, para aproximar el respectivo cero de  $\tilde{f}$ . Luego se calcula el punto asociado al cero aproximado. Finalmente, se verifica que el punto calculado constituye una aproximación al cero de  $f$ .

$$p = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001]$$

$$0.759766$$

$$P = \psi[p]$$

$$\{0.879883, 0.120117\}$$

$$f[P]$$

$$-0.00103961$$

Dada la función  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y, z) = x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz$  y el segmento  $[(0.5, -1, 0.25), (1, -0.5, 0)]$  se construye la función  $\tilde{f}(t) = f((1 - t)(0.5, -1, 0.25) + t(1, -0.5, 0))$  y se aproxima el respectivo cero.

Mathematica

Aquí se define la función  $f(x, y, z) = x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz$

$$f[\{x_, y_, z_.\}] := x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz$$

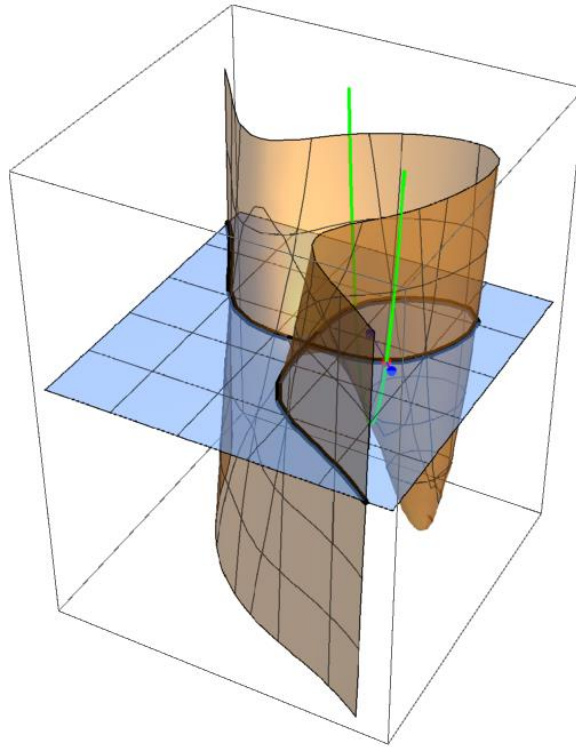


Figura 6. Cero aproximado de la función  $f(x,y) = x^5 + y^5 - 5xy$  en el segmento  $[(0.5,0.5), (1,0)]$ .

*Mathematica*

Aquí se definen las funciones  $\psi(t) = (1-t)(0.5, -1, 0.25) + t(1, -0.5, 0)$  y  $\tilde{f}(t) = f(\psi(t))$ .

$\bar{a} = \{0.5, -1, 0.25\}; \bar{b} = \{1, -0.5, 0\};$

$\psi[t\_]:= (1-t)\bar{a} + t\bar{b}; \tilde{f}[t\_]:= f[\psi[t]]$

$\tilde{f}[t]//Simplify$

$-0.342773 + 2.33887t - 2.80273t^2 + 1.86523t^3 - 0.151367t^4 + 0.0615234t^5$

*Mathematica*

Aquí se aplica el método de bisección a la función  $\tilde{f}$  en el intervalo  $[0,1]$ , con una tolerancia 0.001, para aproximar el respectivo cero de  $\tilde{f}$ . Luego se calcula el punto asociado al cero aproximado. Finalmente, se verifica que el punto calculado constituye una aproximación al cero de  $f$ .

$p = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001]$

0.181641

$P = \psi[p]$

{0.59082, -0.90918, 0.20459}

$f[P]$

0.000613963

Dada la función  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y, z, w) = x^5 + y^5 + z^5 + w^5 - 5xyzw$  y el segmento  $[(0.5, 0.5, 0.5, 0.5), (1, 0, 0.5, 0.5)]$  se construye la función  $\tilde{f}(t) = f((1 - t)(0.5, 0.5, 0.5, 0.5) + t(1, 0, 0.5, 0.5))$  y se aproxima el respectivo cero.

*Mathematica*

Aquí se define la función  $f(x, y, z, w) = x^5 + y^5 + z^5 + w^5 - 5xyzw$

$$f[\{x\_ , y\_ , z\_ , w\_ \}] := x^5 + y^5 + z^5 + w^5 - 5xyzw$$

*Mathematica*

Aquí se definen las funciones  $\psi(t) = (1 - t)(0.5, 0.5, -1, 0.5) + t(1, 0, 0.5, -0.5)$  y  $\tilde{f}(t) = f(\psi(t))$ .

$$\bar{a} = \{0.5, 0.5, -1, 0.5\}; \bar{b} = \{1, 0, 0.5, -0.5\};$$

$$\psi[t\_ ] := (1 - t)\bar{a} + t\bar{b};$$

$$\tilde{f}[t\_ ] := f[\psi[t]]$$

$$\tilde{f}[t]//Simplify$$

$$-0.28125 + 5t - 19.375t^2 + 33.4375t^3 - 24.375t^4 + 6.59375t^5$$

*Mathematica*

Aquí se aplica el método de bisección a la función  $\tilde{f}$  en  $[0, 1]$ , con una tolerancia 0.001, para aproximar el respectivo cero de  $\tilde{f}$ . Luego se calcula el punto asociado al cero aproximado. Finalmente, se verifica que el punto calculado constituye una aproximación al cero de  $f$ .

$$p = Bisection[\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001]$$

$$0.0761719$$

$$P = \psi[p]$$

$$\{0.538086, 0.461914, -0.885742, 0.423828\}$$

$$f[P]$$

$$0.00116703$$

## 4.4. SEGMENTOS SOBRE PARTICIONES EQUIESPACIADAS

Con la finalidad de realizar cálculos en forma ordenada, para que así se puedan unir con líneas quebradas las aproximaciones a obtener, realizaremos tales aproximaciones sobre segmentos en particiones equiespaciadas.

### 4.4.1. Segmentos en un espacio 1D

*Mathematica*

Programa para calcular una partición del intervalo  $[a, b]$ .

```
Mesh1D[a_, b_, n_] := Interval/@Partition[Subdivide[a, b, n], 2, 1]
```

*Mathematica*

Gráfica de la partición del intervalo  $[0, 8]$ , con  $n = 10$ .

```
{a, b} = {0, 8}; n = 10;
```

```
mesh = NumberLinePlot[Mesh1D[a, b, n], Spacings -> 0]
```

Ver Figura 7



Figura 7. Partición equiespaciada del intervalo  $[0, 8]$ .

*Mathematica*

Aproximación de los ceros de  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x \cos x - 1.5$  en  $[0, 8]$ .

```
f[x_] := Sqrt[x^2 + 1] - x Cos[x] - 1.5
```

```
qq = Flatten[{(l, r) = First[#];  $\psi[t_] := (1 - t)l + tr$ ;  $\tilde{f}[t_] := f[\psi[t]]$ ;
```

```
If[ $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0$ , p = Bisection[ $\tilde{f}[t]$ , t, 0, 1, 0.001];  $\psi[p]$ , Nothing]
```

```
)&/@Mesh1D[a, b, n]]
```

```
{1.40781251, 5.554687, 6.9359375}
```

Gráfica de los ceros de  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x \cos x - 1.5$  en  $[0, 8]$ .

```
mqq = Show[mesh,
  NumberLinePlot[qq, Spacings -> 0,
    PlotStyle -> {Black, AbsolutePointSize[7]}]]
```

Ver Figura 8



Figura 8. Ceros de la  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x \cos x - 1.5$  en  $[0, 8]$  (color negro).

Si  $f: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continua, es la función cuyos ceros se desean aproximar, es posible construir la gráfica de  $f$  e interpretar geoméricamente que los ceros de la función son los puntos en los que la gráfica de dicha función corta al eje  $X$  (Figura 9).

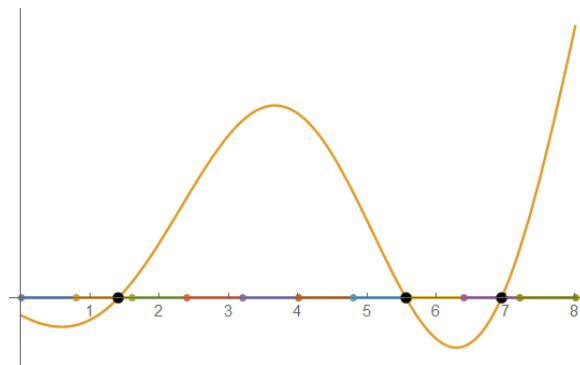


Figura 9. Gráfica de la función  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x \cos x - 1.5$  y sus ceros en  $[0, 8]$ .

#### 4.4.2. Segmentos en un espacio 2D

Programa para calcular una partición del rectángulo  $[a, b] \times [c, d]$ .

```
Interval2D[{a_, b_}, {c_, d_}] := Polygon[{{a, c}, {b, c}, {b, d}, {a, d}}]
```



```
Mesh2D[a_, b_, n_, c_, d_, m_] := Flatten[Outer[Interval2D,
  Partition[Subdivide[a, b, n], 2, 1], Partition[Subdivide[c, d, m], 2, 1], 1]]
```

*Mathematica*

Gráfica de la partición del rectángulo  $[-3, 3] \times [-2, 2]$ , con  $n = 6$  y  $m = 4$ .

```
{a, b} = {-3, 3}; {c, d} = {-2, 2}; n = 6.; m = 4;
mcolor = Mesh2D[a, b, n, a, b, n] /. Polygon[p_] :=>
  {Hue[RandomReal[]], EdgeForm[Black], Opacity[1], Polygon[p]};
mesh = Graphics[mcolor, Axes -> True]
```

Ver Figura 7

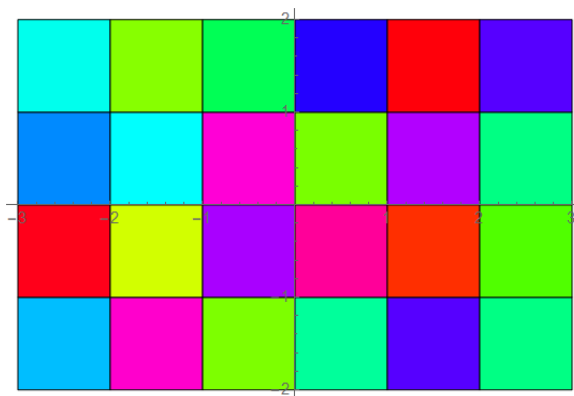


Figura 10. Partición equiespaciada del rectángulo  $[-3, 3] \times [-2, 2]$ .

*Mathematica*

Aproximación de los ceros de  $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$  en  $[-3, 3] \times [-2, 2]$ .

```
f[{x_, y_}] := x^5 + y^5 - 5xy
qq = Flatten[({v1, v2, v3, v4} = First[#]; vv = Partition[{v1, v2, v3, v4, v1}, 2, 1];
  ({l, r} = #;  $\psi[t_] := (1 - t)l + tr$ ;  $\tilde{f}[t_] := f[\psi[t]]$ ; Which[
     $\tilde{f}[0] == 0, \psi[0]$ ,
     $\tilde{f}[1] == 0, \psi[1]$ ,
     $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0, p = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001]$ ;  $\psi[p]$ ,
    True, Nothing]
  )&/@vv)&/@Mesh2D[a, b, n, c, d, m], 1];
```

Gráfica de los ceros de  $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$  en  $[-3, 3] \times [-2, 2]$ . Aquí se aprecia que cada cero ha sido calculado en un segmento que constituye un lado de cierto subrectángulo del rectángulo particionado.

```
mqq = Show[mesh, Graphics[{AbsolutePointSize[7], Point[qq]}], Axes → True]
```

Ver Figura 11

Si  $f: [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , continua, es la función cuyos ceros se desean aproximar, es posible construir la gráfica de  $f$  e interpretar geoméricamente que los ceros de la función son los puntos en los que la gráfica de  $f$  corta al plano  $XY$  (Figura 12). Adicionalmente, como se aprecia en dicha figura los ceros aproximados pertenecen a una curva  $\tilde{C}$  que aproxima, a su vez, a la curva  $C: f(x, y) = 0$  que descansa en el plano  $XY$ . Es aquí donde se requiere aproximar una mayor cantidad de puntos para unirlos con una línea quebrada y obtener así una aproximación de la gráfica de la curva  $C$  (Figura 13, Figura 14, Figura 15).

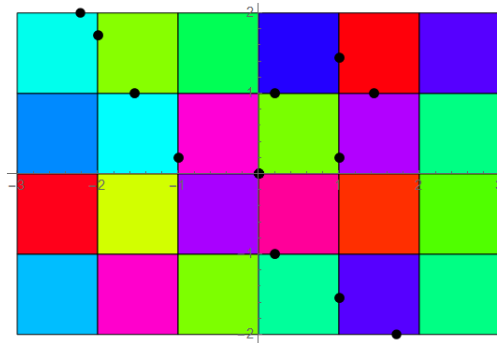


Figura 11. Ceros de la función  $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$  en  $[-3, 3] \times [-2, 2]$ .

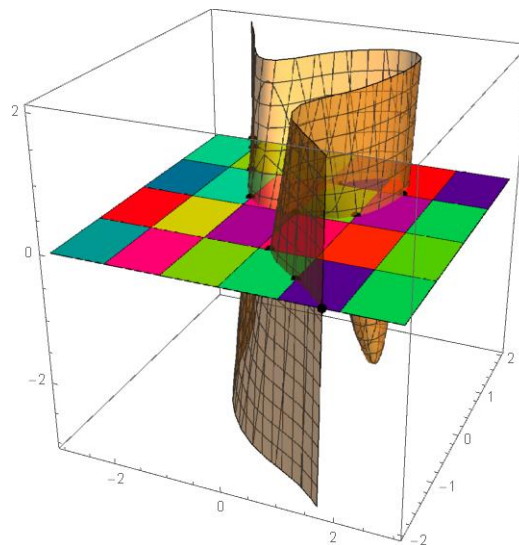


Figura 12. Gráfica de la función  $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$  y sus ceros en  $[-3, 3] \times [-2, 2]$ .

Cálculo de ceros aproximados, unidos por una línea quebrada, de  $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$  en  $[-3, 3] \times [-2, 2]$  con  $n = 22$  y  $m = 16$ .

```
{a, b} = {-3, 3}; {c, d} = {-2, 2}; n = 22.; m = 16.;
cc = Line[DeleteDuplicates[({v1, v2, v3, v4} = First[#];
    vv = Partition[{v1, v2, v3, v4, v1}, 2, 1];
    ({l, r} = #;  $\psi[t_] := (1 - t)l + tr$ ;  $\tilde{f}[t_] := f[\psi[t]]$ ; Which[
         $\tilde{f}[0] == 0, \psi[0]$ ,
         $\tilde{f}[1] == 0, \psi[1]$ ,
         $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0, p = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001]; \psi[p]$ ,
        True, Nothing]
    )&/@vv]]&/@Mesh2D[a, b, n, c, d, m]/.
Line[{{a_, b_}}]:> Nothing/. Line[{}]:> Nothing;
```

Gráfica de los ceros de  $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$  en  $[-3, 3] \times [-2, 2]$  unidos por una línea quebrada.

```
Show[mesh, Graphics[{AbsoluteThickness[3], cc}], Axes-> True]
```

Ver Figura 13

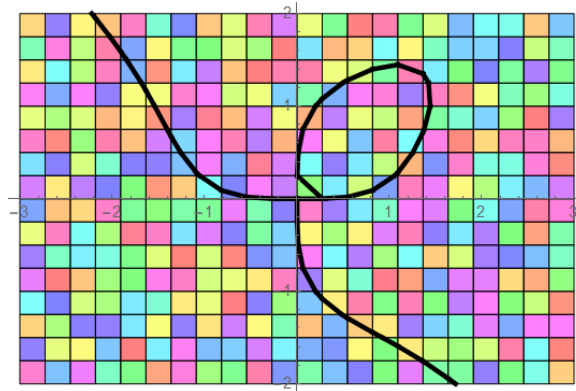


Figura 13. Ceros de la función  $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$  en  $[-3, 3] \times [-2, 2]$  unidos por una línea quebrada.

Gráfica de la función  $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$ , la curva  $C: x^5 + y^5 - 5xy = 0$  en  $[-3, 3] \times [-2, 2]$  junto con la respectiva partición.

```
Show[ContourPlot3D[z == f[{x, y}], {x, a, b}, {y, c, d}, {z, -3, 2},
```

```
ContourStyle-> Directive[Opacity[0.6]], ViewPoint-> {1.21, -2.81, 1.45}},
Graphics3D[{AbsoluteThickness[3], cc, mcolor}/.
{p1_, p2_}/; Head[p1] != List: > {p1, p2, 0}]]
```

Ver Figura 14

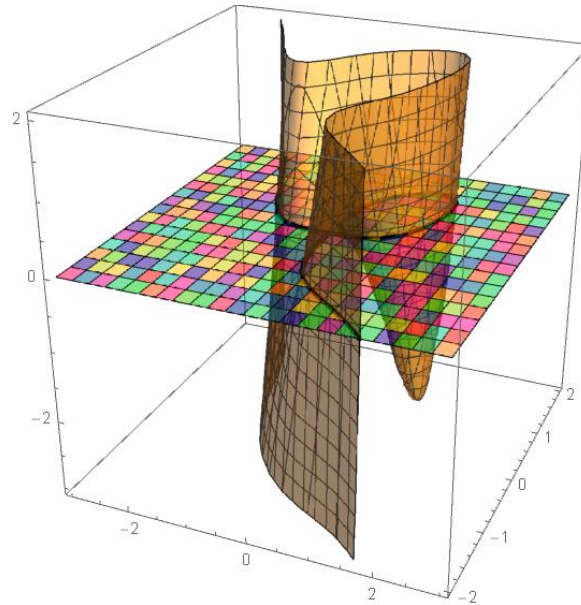


Figura 14. Gráfica de la función  $f(x, y) = x^5 + y^5 - 5xy$  y sus ceros unidos por una línea quebrada en  $[-3, 3] \times [-2, 2]$ .

#### 4.4.3. Segmentos en un espacio 3D

*Mathematica*

Programa para calcular una partición del intervalo 3-dimensional  $[\bar{a}, \bar{b}] = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ .

```
Interval3D[{a_, b_}, {c_, d_}, {e_, f_}] := Module[{list},
  Flatten[list = {{a, b}, {c, d}, {e, f}}];
  Table[Map[Insert[#, list[[i, j]], i] &, Interval2D@@Drop[list, {i}], {2}], {i, 3}, {j, 2}]]
Mesh3D[a_, b_, n_, c_, d_, m_, e_, f_, l_] := Flatten[Outer[Interval3D,
  Partition[Subdivide[a, b, n], 2, 1], Partition[Subdivide[c, d, m], 2, 1],
  Partition[Subdivide[e, f, l], 2, 1], 1]]
```

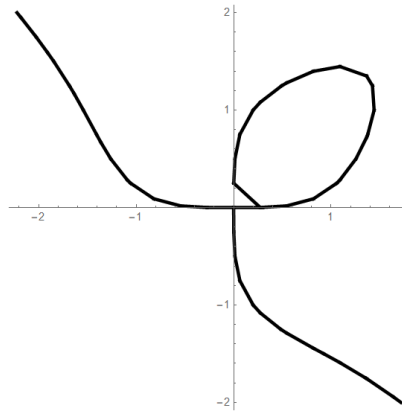


Figura 15. Aproximación de la curva  $C: x^5 + y^5 - 5xy = 0$  en  $[-3,3] \times [-2,2]$ .

*Mathematica*

Gráfica de la partición del intervalo  $[-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3]$ , con  $n = m = l = 4$ .

$\{a, b\} = \{-3, 3\}; n = 4.;$

`mesh = Graphics3D[{Opacity[1], Mesh3D[a, b, n, a, b, n, a, b, n]}]/.`

`Polygon[p_] := {Hue[RandomReal[]], EdgeForm[Black], Opacity[0.4], Polygon[p]};`

Ver Figura 16

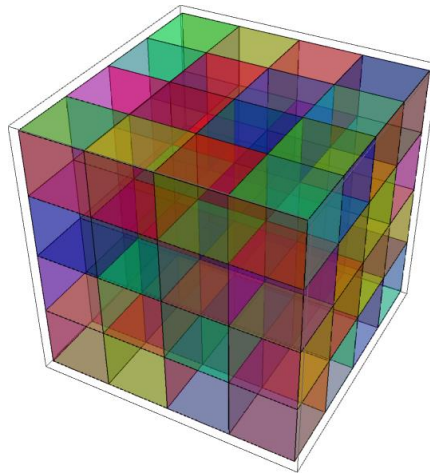


Figura 16. Partición equiespaciada del intervalo 3-dimensional  $[-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3]$ .

*Mathematica*

Aproximación de los ceros de  $f(x, y, z) = x^5 + y^5 + z^5 - 5xy - 5xz - 5yz$  en  $[-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3]$ .

$f[\{x_, y_, z_.\}] := x^5 + y^5 + z^5 - 5xy - 5xz - 5yz$

`qq = Flatten[({v1, v2, v3, v4} = First[#]; vv = Partition[{v1, v2, v3, v4, v1}, 2, 1];`

`{l, r} = #;  $\psi[t_.] := (1 - t)l + tr$ ;  $\tilde{f}[t_.] := f[\psi[t]]$ ; Which[`

`$\tilde{f}[0] == 0, \psi[0],$`

```

 $\tilde{f}[1] == 0, \psi[1],$ 
 $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0, p = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001]; \psi[p],$ 
True, Nothing]
)&/@vv)&/@Mesh3D[a, b, n, a, b, n, a, b, n, 1];

```

Mathematica

Gráfica de los ceros de  $f(x, y, z) = x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz$  en  $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$ .

```
mqq = Show[mesh, Graphics[{AbsolutePointSize[7], Point[qq]}], Axes -> True]
```

Ver Figura 17

Si  $f: [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , continua, es la función cuyos ceros se desean aproximar, ya no es posible construir la gráfica de  $f$  e interpretar geoméricamente que los ceros de la función son los puntos en los que la gráfica de  $f$  corta al espacio  $XYZ$ . No obstante, con base en los resultados previos, podemos deducir que los ceros aproximados pertenecen a una superficie  $\tilde{S}$  que aproxima, a su vez, a la superficie  $S: f(x, y, z) = 0$  que descansa en el espacio  $XYZ$ . Es aquí donde se requiere aproximar una mayor cantidad de puntos para unirlos con una línea quebrada y obtener así una aproximación de la gráfica de la superficie  $S$  (Figura 18, Figura 19).

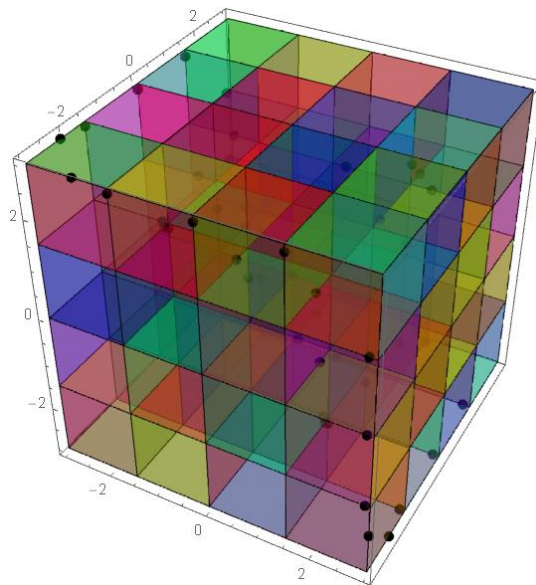


Figura 17. Ceros de la función  $f(x, y, z) = x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz$  en  $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$ .

Cálculo de ceros aproximados, unidos por una línea quebrada, de  $f(x, y, z) = x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz$  en  $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$  con  $n = m = l = 10$ .

```
{a, b} = {-3, 3}; n = 10.;
ss = Line[DeleteDuplicates[({v1, v2, v3, v4} = First[#];
    vv = Partition[{v1, v2, v3, v4, v1}, 2, 1];
    ({l, r} = #;  $\psi[t_] := (1 - t)l + tr$ ;  $\tilde{f}[t_] := f[\psi[t]]$ ; Which[
         $\tilde{f}[0] == 0, \psi[0]$ ,
         $\tilde{f}[1] == 0, \psi[1]$ ,
         $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0, p = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001]; \psi[p]$ ,
        True, Nothing]
    )&/@vv]]&/@Mesh3D[a, b, n, a, b, n, a, b, n]/.
Line[{{a_, b_}}]:> Nothing/.Line[{}]:> Nothing;
```

Gráfica de los ceros de  $f(x, y, z) = x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz$  en  $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$  unidos por una línea quebrada.

```
Show[mesh, Graphics[{AbsoluteThickness[3], ss}], Axes -> True]
```

Ver Figura 19

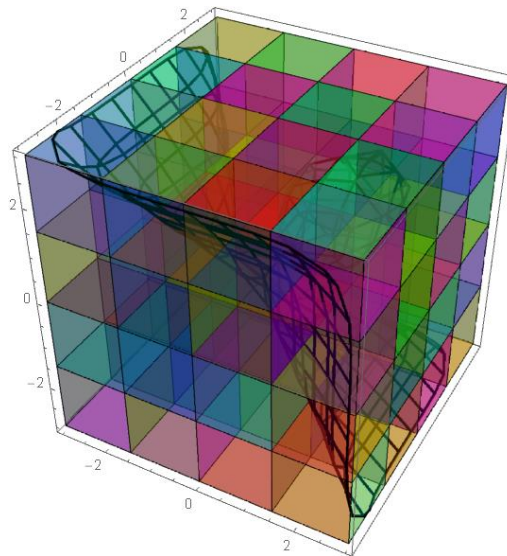


Figura 18. Ceros de la función  $f(x, y, z) = x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz$  en  $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-3, 3]$  unidos por una línea quebrada.

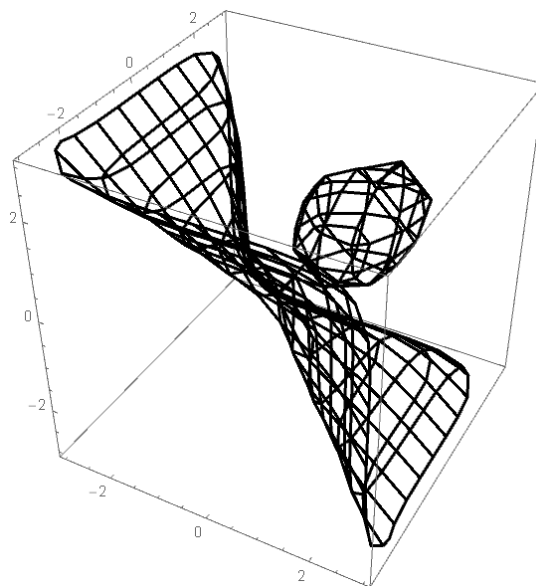


Figura 19. Aproximación de la superficie  $S: x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz = 0$  en  $[-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3]$ .

#### 4.4.4. Segmentos en un espacio 4D

*Mathematica*

Programa para calcular una partición del intervalo 4-dimensional  $[a, b] \times [c, d] \times [e, f] \times [g, h]$ .

```
Interval4D[{a_, b_}, {c_, d_}, {e_, f_}, {g_, h_}] := Module[{list},
  Flatten[list = {{a, b}, {c, d}, {e, f}, {g, h}}];
  Table[Map[Insert[#, list[[i, j]], i] &, Interval3D@@Drop[list, {i}], {3}], {i, 4}, {j, 2}]]]
Mesh4D[a_, b_, n_, c_, d_, m_, e_, f_, l_, g_, h_, k_] := Flatten[Outer[Interval4D,
  Partition[Subdivide[a, b, n], 2, 1], Partition[Subdivide[c, d, m], 2, 1],
  Partition[Subdivide[e, f, l], 2, 1], Partition[Subdivide[g, h, k], 2, 1], 1]]]
```

*Mathematica*

Gráfica de la partición del intervalo  $[-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3]$ , con  $n = m = l = k = 5$ .

```
{a, b} = {-4, 4}; n = 5.;
mesh = Graphics4D[{Opacity[1], Mesh4D[a, b, n, a, b, n, a, b, n, a, b, n]}]/.
  Polygon[p_] :> {Hue[RandomReal[]], EdgeForm[Black], Opacity[0.4], Polygon[p]};
```

Ver Figura 20



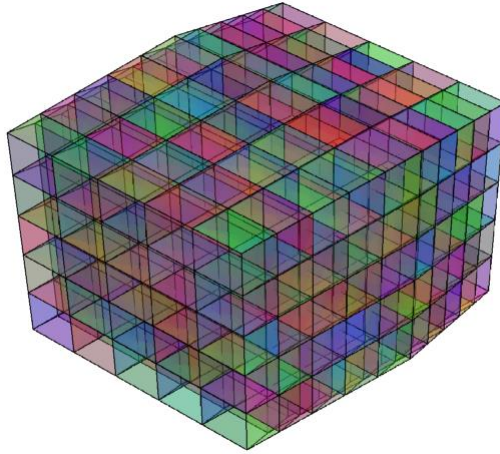


Figura 20. Partición equiespaciada del intervalo 4-dimensional  $[-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3]$ .

*Mathematica*

Aproximación de los ceros de  $f(x, y, z, w) = x^5 + y^5 + z^5 + w^5 - 5xy - 5xz - 5xw - 5yz - 5yw - 5zw$  en  $[-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3]$ .

$f[\{x\_ , y\_ , z\_ , w\_ \}] := x^5 + y^5 + z^5 + w^5 - 5xy - 5xz - 5xw - 5yz - 5yw - 5zw$

qq = Flatten[({v1, v2, v3, v4} = First[#]; vv = Partition[{v1, v2, v3, v4, v1}, 2, 1];

({l, r} = #;  $\psi[t\_ ] := (1 - t)l + tr$ ;  $\tilde{f}[t\_ ] := f[\psi[t]]$ ; Which[

$\tilde{f}[0] == 0, \psi[0],$

$\tilde{f}[1] == 0, \psi[1],$

$\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0, p = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001]; \psi[p],$

True, Nothing]

)&/@vv)&/@Mesh4D[a, b, n, a, b, n, a, b, n, a, b, n, 1];

*Mathematica*

Gráfica de los ceros de  $f(x, y, z, w) = x^5 + y^5 + z^5 + w^5 - 5xy - 5xz - 5xw - 5yz - 5yw - 5zw$  en  $[-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3]$ .

mqq = Show[mesh, Graphics[{AbsolutePointSize[7], Point[qq]}], Axes -> True]

Ver Figura 21

Si  $f: [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \times [g, h] \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , continua, es la función cuyos ceros se desean aproximar, tampoco es posible construir la gráfica de  $f$  e interpretar geoméricamente que los ceros de la función son los puntos en los que la gráfica de  $f$  corta al hiperespacio  $XYZW$ . No obstante, con base en los resultados previos, podemos deducir que los ceros aproximados pertenecen a una

hipersuperficie (sólido)  $\tilde{H}$  que aproxima, a su vez, a la hipersuperficie  $H: f(x, y, z, w) = 0$  que descansa en el hiperespacio  $XYZW$ . Es aquí donde se requiere aproximar una mayor cantidad de puntos para unirlos con una línea quebrada y obtener así una aproximación de la gráfica de la hipersuperficie (sólido)  $H$  (Figura 22, Figura 23).

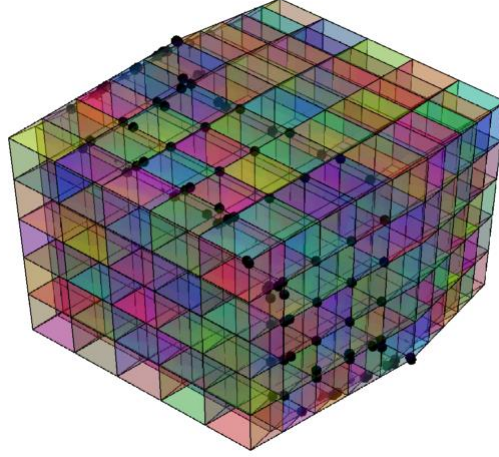


Figura 21. Ceros de la función  $f(x, y, z, w) = x^5 + y^5 + z^5 + w^5 - 5xy - 5xz - 5xw - 5yz - 5yw - 5zw$  en  $[-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3]$ .

Mathematica

Cálculo de ceros aproximados, unidos por una línea quebrada, de  $f(x, y, z, w) = x^5 + y^5 + z^5 + w^5 - 5xy - 5xz - 5xw - 5yz - 5yw - 5zw$  en  $[-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3]$  con  $n = m = l = k = 10$ .

$\{a, b\} = \{-5, 5\}; n = 5;$

```
hh = Line[DeleteDuplicates[({v1, v2, v3, v4} = First[#];
vv = Partition[{v1, v2, v3, v4, v1}, 2, 1];
({l, r} = #;  $\psi[t_] := (1 - t)l + tr$ ;  $\tilde{f}[t_] := f[\psi[t]]$ ; Which[
 $\tilde{f}[0] == 0, \psi[0]$ ,
 $\tilde{f}[1] == 0, \psi[1]$ ,
 $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0, p = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001]$ ;  $\psi[p]$ ,
True, Nothing]
)&/@vv]]&/@Mesh4D[a, b, n, a, b, n, a, b, n, a, b, n]/.
Line[{{a_, b_}}]:> Nothing/. Line[{}]:> Nothing;
```

Gráfica de los ceros de  $f(x, y, z, w) = x^5 + y^5 + z^5 + w^5 - 5xy - 5xz - 5xw - 5yz - 5yw - 5zw$  en  $[-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3]$  unidos por una línea quebrada.

Show[mesh, Graphics[{AbsoluteThickness[3], hh}], Axes -> True]

Ver Figura 22

#### 4.4.5. Segmentos en un espacio $nD$

Los resultados obtenidos subsubsecciones previas admiten una generalización para espacios  $n$ -dimensionales. Los intervalos  $n$ -dimensionales se pueden definir de la siguiente manera.

$Interval2D[\{a11\_a12\_ \}, \{a21\_a22\_ \}] :=$

$Polygon[\{\{a11, a21\}, \{a12, a21\}, \{a12, a22\}, \{a11, a22\}\}]$

$Mesh2D[a11\_a12\_ \lambda1\_a21\_a22\_ \lambda2\_ ] := Flatten[Outer[Interval2D,$

$Partition[Subdivide[a11, a12, \lambda1], 2, 1], Partition[Subdivide[a21, a22, \lambda2], 2, 1], 1]]$

$IntervalnD[\{a11\_a12\_ \}, \dots, \{an1\_an2\_ \}] := Module[\{list\},$

$Flatten[list = \{\{a11\_a12\_ \}, \dots, \{an1\_an2\_ \}\};$

$Table[Map[Insert[\#, list[[i, j]], i] \&,$

$Interval(n - 1)D @@ Drop[list, \{i\}, \{n - 1\}, \{i, n\}, \{j, 2\}] ]]$

$MeshnD[a11\_a12\_ \lambda1\_ \dots, an1\_an2\_ \lambda n\_ ] := Flatten[Outer[IntervalnD,$

$Partition[Subdivide[a11, a12, \lambda1], 2, 1], \dots, Partition[Subdivide[an1, an2, \lambda n], 2, 1], 1]]$

Para  $n > 2$ .

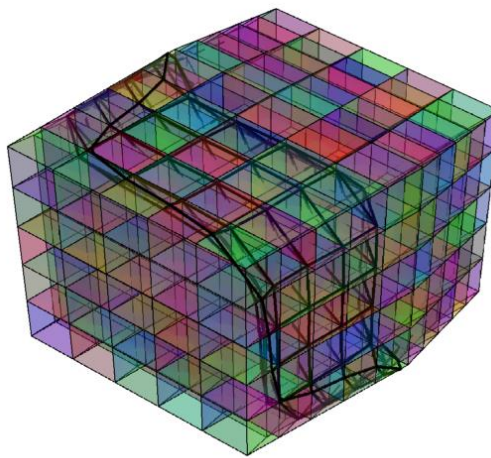


Figura 22. Ceros de la  $f(x, y, z, w) = x^5 + y^5 + z^5 + w^5 - 5xy - 5xz - 5xw - 5yz - 5yw - 5zw$  en  $[-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3]$  unidos por una línea quebrada.

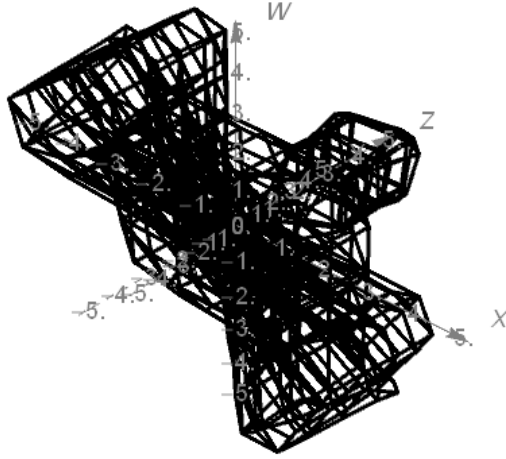


Figura 23. Aproximación de la hipersuperficie  $H: x^5 + y^5 + z^5 + w^5 - 5xy - 5xz - 5xw - 5yz - 5yw - 5zw = 0$  en  $[-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3] \times [-3,3]$ .

La aproximación de los ceros se haría mediante el siguiente código.

```
f[{x1_, ..., xn_}] :=  $\phi(x1, \dots, xn)$ 
Flatten[({v1, v2, v3, v4} = First[#]; vv = Partition[{v1, v2, v3, v4, v1}, 2, 1];
  ({l, r} = #;  $\psi[t_]$  :=  $(1 - t)l + tr$ ;  $\tilde{f}[t_]$  :=  $f[\psi[t]]$ ; Which[
     $\tilde{f}[0] == 0, \psi[0]$ ,
     $\tilde{f}[1] == 0, \psi[1]$ ,
     $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0, p = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001]$ ;  $\psi[p]$ ,
    True, Nothing]
  )&/@vv)&/@MeshnD[a11, a12,  $\lambda_1, \dots, an1, an2, \lambda_n$ , 1] ;
```

donde  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, dada, y  $a11, a12, \lambda_1, \dots, an1, an2, \lambda_n$  son valores previamente fijados.

La aproximación de los ceros, unidos por una línea quebrada, se realizará con este código.

```
f[{x1_, ..., xn_}] :=  $\phi(x1, \dots, xn)$ 
Line[DeleteDuplicates[({v1, v2, v3, v4} = First[#];
  vv = Partition[{v1, v2, v3, v4, v1}, 2, 1];
  ({l, r} = #;  $\psi[t_]$  :=  $(1 - t)l + tr$ ;  $\tilde{f}[t_]$  :=  $f[\psi[t]]$ ; Which[
     $\tilde{f}[0] == 0, \psi[0]$ ,
     $\tilde{f}[1] == 0, \psi[1]$ ,
     $\tilde{f}[0]\tilde{f}[1] < 0, p = \text{Bisection}[\tilde{f}[t], t, 0, 1, 0.001]$ ;  $\psi[p]$ ,
    True, Nothing]
  )&/@vv]]&/@MeshnD[a11, a12,  $\lambda_1, \dots, an1, an2, \lambda_n$ ]/.
```

```
Line[{{a_, b_}}]:> Nothing/.Line[{}]:> Nothing;
```

donde  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, dada, y  $a_{11}, a_{12}, \lambda_1, \dots, a_{n1}, a_{n2}, \lambda_n$  son valores previamente fijados.

#### 4.4.6. El nuevo comando **ImplicitPlot4D**

Las subsubsecciones correspondientes a segmentos en espacios 2D y 3D producen resultados que son ampliamente superados por los comandos *ContourPlot* y *ContourPlot3D* del Mathematica. Sin embargo, en las subsubsecciones correspondientes a segmentos en espacios 4D y  $n$ D se obtienen resultados no tienen ningún símil entre los comandos incorporados del Mathematica. En esta subsubsección elegiremos el caso de segmentos en el espacio 4D para implementar el incipiente pero nuevo comando *ImplicitPlot4D* que permita bosquejar la gráfica de una hipersuperficie (sólido) definida en forma implícita.

Mathematica

Definición del nuevo comando *ImplicitPlot4D*.

```
ImplicitPlot4D[ funl_ == funr_, {x_, xmin_, xmax_, n_:5},
  {y_, ymin_, ymax_, n_:5}, {z_, zmin_, zmax_, l_:5},
  {w_, wmin_, wmax_, k_:5}, Opts___]:=
Module[{hh, f, vv, v1, v2, v3, v4, le, ri,  $\psi$ , ff, p, t},
  f[{xx_, yy_, zz_, ww_}]:= funl - funr/.
  {x->xx, y->yy, z->zz, w->ww};
  hh = Line[DeleteDuplicates[{v1, v2, v3, v4} = First[#];
    vv = Partition[{v1, v2, v3, v4, v1}, 2, 1];
    ({le, ri} = #;  $\psi$ [t_]:= (1 - t)le + tri; ff[t_]:= f[ $\psi$ [t]]; Which[
      ff[0] == 0,  $\psi$ [0],
      ff[1] == 0,  $\psi$ [1],
      ff[0]ff[1] < 0, p = Bisection[ff[t], t, 0, 1, 0.001];  $\psi$ [p],
      True, Nothing]
    )&/@vv]]&/@
  Mesh4D[xmin, xmax, n, ymin, ymax, m, zmin, zmax, l, wmin, wmax, k]/.
  Line[{{a_, b_, c_, d_}}]:> Nothing/. Line[{}]:> Nothing;
Graphics4D[{hh}, Opts]
```

Gráfica, en malla de alambre, de  $M_1: x^5 + y^5 + z^5 + w^5 - 5xy - 5xz - 5xw - 5yz - 5yw - 5zw = 0$ .

```
ImplicitPlot4D[x5 + y5 + z5 + w5 - 5xy - 5xz - 5xw - 5yz - 5yw - 5zw == 0,
{x, -3, 3}, {y, -3, 3}, {z, -3, 3}, {w, -3, 3}, Axes -> True,
AxesLength -> {{-5, 5}, {-5, 5}, {-5, 5}, {-5, 5}}]
```

Ver Figura 24

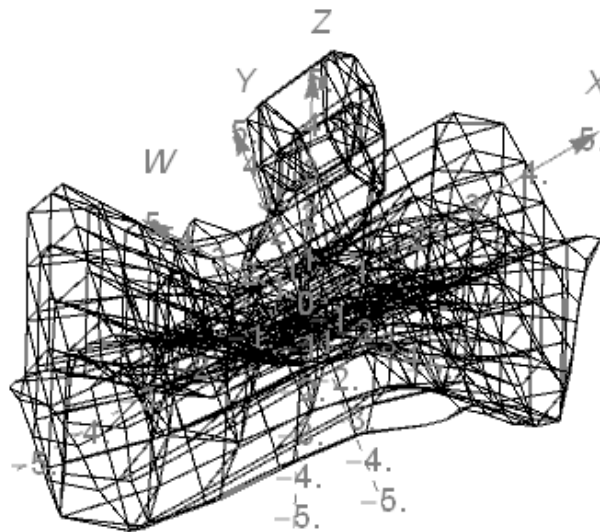


Figura 24. Gráfica de  $M_1$ .

Gráfica, en malla de alambre, de  $M_2: x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ .

```
ImplicitPlot4D[x2 + y2 + z2 + w2 == 1,
{x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}, {w, -1, 1}, Axes -> True,
AxesLength -> {{-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}, {-1.5, 1.5}}]
```

Ver Figura 25

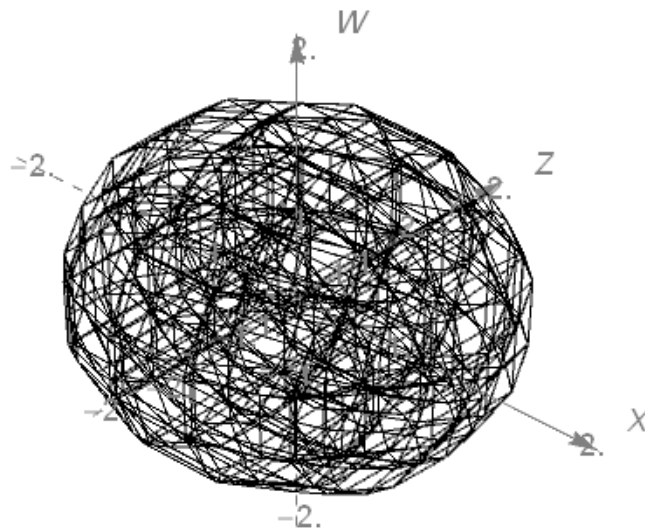


Figura 25. Gráfica de  $M_2$ .

Gráfica, en malla de alambre, de  $M_3: x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 1$ .

```
ImplicitPlot4D[x^2 + y^2 + z^2 - w^2 == 1,
  {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}, {w, -2, 2}, Axes -> True,
  AxesLength -> {{-2, 2}, {-2, 2}, {-2, 2}, {-3, 3}}]
```

Ver Figura 25

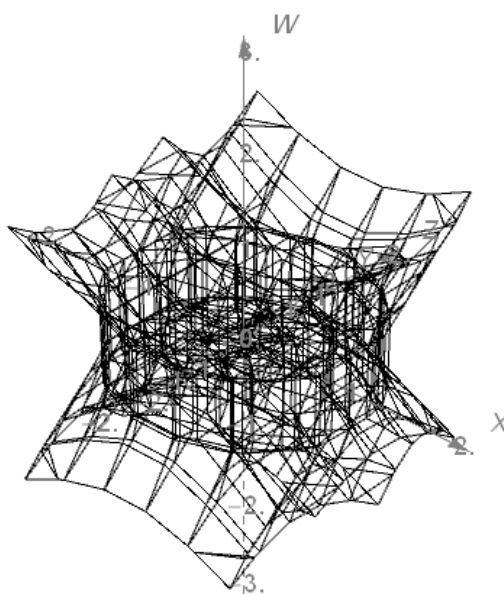


Figura 26. Gráfica de  $M_3$ .

Gráfica, en malla de alambre, de  $M_4: x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 1$ .

```
ImplicitPlot4D[x^2 + y^2 - z^2 - w^2 == 1,
{x, -2, 2}, {y, -2, 2}, {z, -3, 3}, {w, -3, 3}, Axes -> True,
AxesLength -> {{-5, 5}, {-5, 5}, {-5, 5}, {-3, 3}}]
```

Ver Figura 27

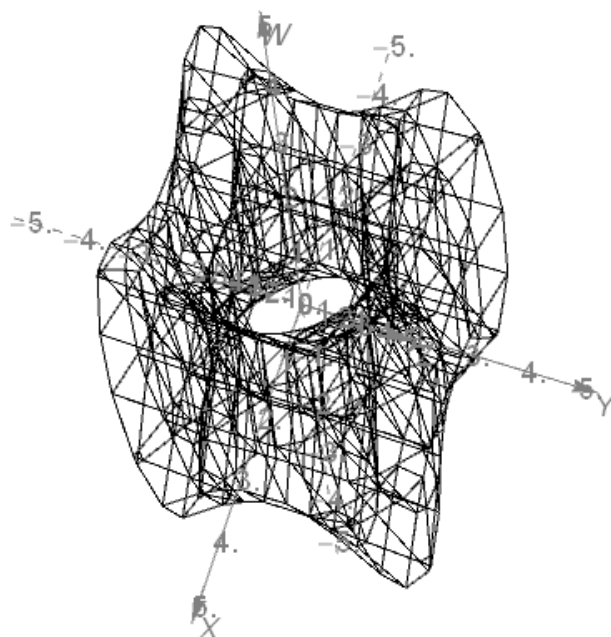


Figura 27. Gráfica de  $M_4$ .

Gráfica, en malla de alambre, de  $M_5: \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 4\right)^2 + w^2 = 1$ .

```
ImplicitPlot4D[(Sqrt[x^2 + y^2 + z^2] - 4)^2 + w^2 == 1,
{x, -6, 6, 8}, {y, -6, 6, 8}, {z, -2, 2, 6}, {w, -2, 2}, Axes -> True,
AxesLength -> {{-7, 7}, {-7, 7}, {-7, 7}, {-7, 7}}]
```

Ver Figura 28



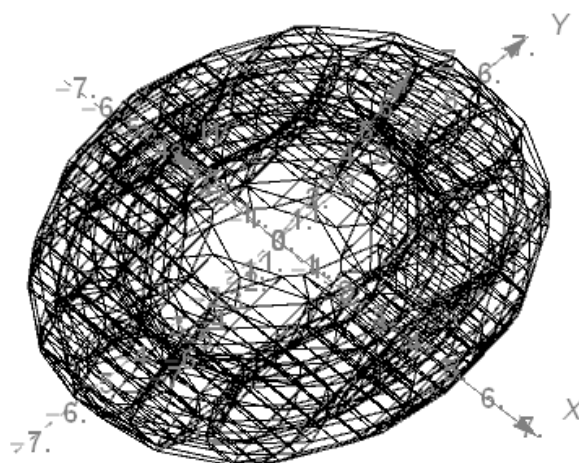


Figura 28. Gráfica de  $M_5$ .

Gráfica, en malla de alambre, de  $M_6: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

```
ImplicitPlot4D[x^2 + y^2 + z^2 == 1,
{x, -1, 1}, {y, -1, 1}, {z, -1, 1}, {w, -2, 2}, Axes -> True,
AxesLength -> {{-2, 2}, {-2, 2}, {-2, 2}, {-3, 3}}]
```

Ver Figura 29

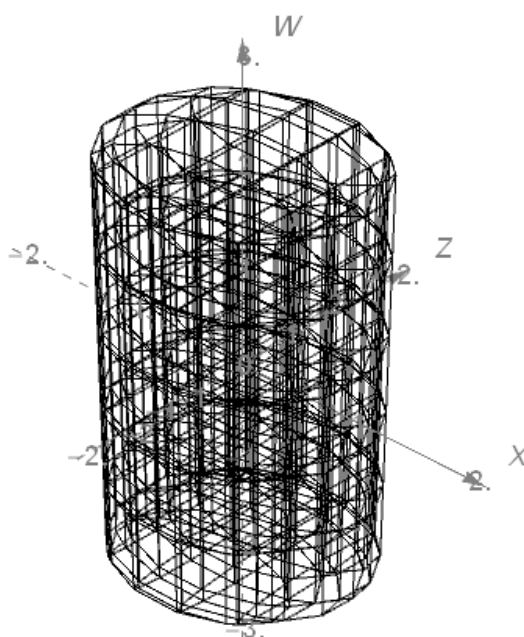


Figura 29. Gráfica de  $M_6$ .

## CONCLUSIONES

1. Que los teoremas de conservación de signo, Bolzano y valor intermedio se adecúan para trabajar en funciones continuas de varias variables reales y valor real, sobre intervalos de sus dominios.
2. Es de vital importancia entender el aspecto matemático de la definición del método de bisección para funciones continuas de varias variables reales y valor real, sobre intervalos de sus dominios, y así vislumbrar el aspecto geométrico.
3. Particionar el dominio de funciones continuas de varias variables reales y valor real juega un papel importante para aproximar algunos de sus ceros, que constituyen puntos en el dominio.
4. La implementación de comandos me permite interpretar geoméricamente los resultados, y por ende, tener una idea más clara del presente trabajo.
5. La implementación de comandos para generalizar la partición de los dominios de las funciones continuas de varias variables reales y valor real me conllevan a una mejor aproximación.
6. La implementación de programar me permite visualizar, en tiempo real, los ceros aproximados de funciones continuas de varias variables y valor real usando el método de bisección.

## RECOMENDACIONES

1. Utilizar otros métodos de aproximación de ceros para aproximar los ceros de funciones continuas de varias variables reales y valor real.
2. Realizar una investigación similar a la de este trabajo con un software libre.
3. Utilizar una computadora de características iguales o superiores a una Intel(R) Core(TM) i7-6500U CPU @ 2.50GHz 2.60 GHZ para ejecutar los ejemplos mostrados en este trabajo.
4. Incluir las técnicas mostradas en este trabajo en un curso de análisis numérico tradicional.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Apostol, T. (2001). *Calculus* (Vol. I). Barcelona: Reverté.
- Apostol, T. (2002). *Calculus* (Vol. II). Barcelona: Reverté.
- Bachrathy, D. (2014). *MDBM Multi-Dimensional Bisection Method*. Recuperado el Junio de 2018, de Budapest University of Technology and Economics: [http://www.mm.bme.hu/~bachrathy/MDBM\\_users\\_guide.pdf](http://www.mm.bme.hu/~bachrathy/MDBM_users_guide.pdf)
- Bachrathy, D., & Stépán, G. (2012). Bisection method in higher dimensions and the efficiency number. *Periodica polytechnica*, 81-86. doi:10.3311/pp.me.2012-2.01
- Burden, R., & Faires, D. (2002). *Análisis Numérico*. International Thomson Editores S.A.
- Gray, J. (1994). *Mastering Mathematica*. New York: Academic Press Inc.
- Ipanaqué, R. (Octubre de 2014). El método de bisección. Universidad Nacional de Piura, Piura, Perú.
- Lima, E. (1999). *Curso de análise* (Vol. II). Río de Janeiro: IMPA.
- López, M. (26 de Noviembre de 2017). *The multivariate bisection algorithm*. Recuperado el Junio de 2018, de ARXIV: <https://arxiv.org/abs/1702.05542>
- Martin, C., & Rayskin, V. (12 de Enero de 2016). *An improved bisection method in two dimensions*. Recuperado el Junio de 2018, de The University of Texas mp\_arc: [https://www.ma.utexas.edu/mp\\_arc/c/16/16-19.pdf](https://www.ma.utexas.edu/mp_arc/c/16/16-19.pdf)
- Morozova, E. (2008). A Multidimensional Bisection Method. *Proceedings of the fourteenth symposium on Computing: the Australasian theory* (págs. 57-62). Darlinghurst: Australian Computer Society, Inc.
- Velezmoro, R., & Ipanaqué, R. (2015). Un modelo para visualizar objetos en 4D con el Mathematica. *ECIPerú*, 11(2), 12-18.
- Wellin, P., Kamin, S., & Gaylord, R. (2005). *An Introduction to Programming with Mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Wolfram, S. (2003). *The Mathematica Book*. Champaign: Wolfram Research, Inc.

## **ANEXOS**

## ANEXO 1

### Título: **APROXIMACIÓN DE LOS CEROS DE FUNCIONES CONTINUAS DE VARIAS VARIABLES REALES Y VALOR REAL MEDIANTE EL MÉTODO DE BISECCIÓN CON EL MATHEMATICA**

Nombre del tesista: Luis Alberto Anto Mimbela

Problemas	Objetivos	Hipótesis	Metodología
<p><b>General</b> ¿Será posible aproximar los ceros de funciones continuas de varias variables y valor real mediante el método de bisección?</p> <p><b>Específicos</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>¿Será posible que los teoremas de conservación de signo, Bolzano y valor intermedio se cumplan para funciones continuas de varias variables reales y valor real?</li> <li>¿Será posible definir el método de bisección para funciones continuas de varias variables reales y valor real?</li> <li>¿Será posible realizar las interpretaciones geométricas de los resultados?</li> <li>¿Será posible realizar la implementación computacional de los resultados?</li> </ol>	<p><b>General</b> Aproximar los ceros de funciones continuas de varias variables y valor real mediante el método de bisección.</p> <p><b>Específicos</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Verificar que los teoremas de conservación de signo, Bolzano y valor intermedio se cumplen para funciones de varias variables reales y valores reales.</li> <li>Es posible definir el método de bisección para funciones continuas de varias variables reales y valor real.</li> <li>Realizar las interpretaciones geométricas de los resultados.</li> <li>Realizar la implementación computacional de los resultados.</li> </ol>	<p><b>General</b> Es posible aproximar los ceros de funciones continuas de varias variables y valor real mediante el método de bisección.</p> <p><b>Específicos</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Es posible verificar que los teoremas de conservación de signo, Bolzano y valor intermedio se cumplen para funciones continuas de varias variables reales y valor real.</li> <li>Es posible definir el método de bisección para funciones continuas de varias variables reales y valor real.</li> <li>Es posible realizar las interpretaciones geométricas de los resultados.</li> <li>Es posible realizar la implementación computacional de los resultados.</li> </ol> <p><b>Justificación</b> Este trabajo se realizará porque no se registra el uso del método de bisección para aproximar los ceros de funciones continuas varias variables y valor real en la forma que se propone en este trabajo.</p> <p><b>Importancia</b> Este trabajo se realizará para aportar otra generalización del método de bisección en la aproximación de los ceros de funciones continuas de varias variables y valor real. Esto permitirá obtener puntos que pertenezcan a las gráficas de curvas, superficies, sólidos, etc.</p>	<p><b>Enfoque:</b> Cuantitativo. <b>Diseño:</b> Experimental. <b>Nivel:</b> Descriptivo. <b>Tipo:</b> Básica. <b>Métodos</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Partición equiespaciada de dominios.</li> <li>Método de bisección para aproximar los ceros de funciones de varias variables y valor reales.</li> <li>Programas en el software de cálculo simbólico Wolfram Mathematica v.11.2.</li> </ul>